

基于不平衡推力法的边坡可靠度分析

黄 超, 王水林

(中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071)

摘 要: Rosenblueth 方法是一种简单实用的可靠度指标计算方法, 不需要了解各状态变量分布函数, 只要利用它们的均值和方差, 就可求得边坡的可靠指标。推导了下滑力超载储备安全系数的显式表达式, 以此式作为边坡可靠度分析的状态函数, 结合 Rosenblueth 方法的优点, 给出了一种边坡稳定可靠度分析的实用方法。

关 键 词: 边坡稳定; Rosenblueth 方法; 可靠度指标; 破坏概率; 下滑力超载储备安全系数

中图分类号: TU 443

文献标识码: A

Slope's reliability analysis based on imbalance thrust force method

HUANG Chao, WANG Shui-lin

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract: The Rosenblueth Method is a simple and practical calculation method of reliability index as the probability distribution of all kinds of state variables does not need to be known, and only by using the averages and variances of state variables can one get the reliability index of soil slope. In this paper an explicit expression about landslide load-increased factor is deduced. Using the expression as the status function of reliability analysis and the advantage of Rosenblueth Method, a method of calculating the reliability of slope is put forward.

Key words: slope stability; Rosenblueth method; reliability index; failure probability; landslide load-increased factor

1 引 言

传统工程设计使用的安全系数法是基于确定性的概念, 没有考虑工程岩体的不确定性, 因而不能真正反映工程的可靠性。可靠性理论是将有关参数作为不确定性变量, 利用概率论及数理统计的方法研究边坡的稳定性, 可有效地解决岩土体内客观存在的不确定问题^[1]。

Rosenblueth 方法是边坡稳定可靠性分析一种较实用的方法, 其优点是不必知道随机变量的分布类型, 只要利用其均值和方差, 就可求得状态函数的一阶原点矩和二阶中心矩, 进而求得可靠指标和破坏概率^[2]。本文中的状态函数采用下滑力超载储备安全系数的显式解, 与 Rosenblueth 方法结合, 可方便快捷地求得边坡的破坏概率。

2 状态函数

边坡可靠度分析状态函数采用下滑力超载储

备安全系数的显式表达式, 该法是边坡稳定分析中不平衡推力法的一种解法, 其原理是对土坡取铅直条分, 假定了条块间作用力的方向, 即上一块土条传递来的推力平行于上一块土条的底滑面^[3]。将外荷载引起的下滑力增大 F_S 倍后, 根据平行于底滑面和垂直于底滑面两个方向的合力等于 0 以及最前缘一块的剩余推力为 0 进行求解, 滑动面的破坏服从 Mohr-Coulomb 破坏准则:

$$\left. \begin{aligned} P_i + S_i - P_{i-1} \cos(\alpha_{i-1} - \alpha_i) - F_S W_i \sin \alpha_i - \\ F_S Q_i \cos \alpha_i = 0 ; \\ N_i - P_{i-1} \sin(\alpha_{i-1} - \alpha_i) - W_i \cos \alpha_i + Q_i \sin \alpha_i = 0 ; \\ S_i = c_i L_i + N_i \tan \varphi_i \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

解方程式(1)有

$$P_i = P_{i-1} W_{i-1} + F_S T_i - S_i \quad (2)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{i-1} &= \cos(\alpha_{i-1} - \alpha_i) - \sin(\alpha_{i-1} - \alpha_i) \tan \varphi_i; \\ S_i &= c_i l_i + (W_i \cos \alpha_i - Q_i \sin \alpha_i) \tan \varphi_i; \\ T_i &= W_i \sin \alpha_i + Q_i \cos \alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

根据求解条件 $P_n = 0$, 可得到安全系数的显式计算公式:

$$\left. \begin{aligned} F_S &= \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (S_i \prod_{j=i}^{n-1} \psi_j) + S_n}{\sum_{i=1}^{n-1} (T_i \prod_{j=i}^{n-1} \psi_j) + T_n}; \\ \prod_{j=i}^{n-1} \psi_j &= \psi_i \psi_{i+1} \cdots \psi_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(4)就是文[4]中稳定系数的计算公式。状态函数表达式为

$$Z = F(c, \varphi) = F_S \quad (5)$$

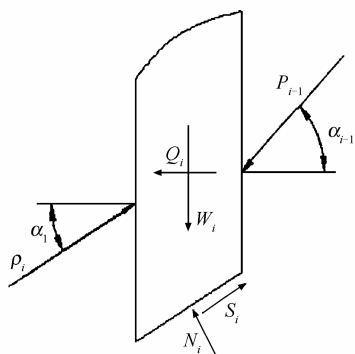


图1 条块受力分析

Fig.1 Force analysis of slice

3 Rosenblueth 方法基本原理

对于一般的边坡稳定分析问题, 在定值法分析计算的基础上, 选定某些参数为基本变量, 可以建立如下的状态方程:

$$Z = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6)$$

在状态变量 x_i ($i=1, 2, \dots, n$) 的分布函数未知的情况下, 无需考虑其变化形态, 只在区间 $(x_{\min}, x_{\max})$ 上分别对称地择其 2 个取值点, 通常取均值 μ_{x_i} 的正负一个标准差 σ_{x_i} , 即

$$x_{i1} = \mu_{x_i} + \sigma_{x_i}; x_{i2} = \mu_{x_i} - \sigma_{x_i} \quad (7)$$

对于 n 个状态变量, 有 $2n$ 个取值点, 取值点的所有可能组合则有 2^n 个。在 2^n 个组合下, 可根据状态方程, 求得 2^n 个状态函数值 Z [5,6]。

如果 n 个状态变量相互独立, 每一组合出现的概率相等, 则 Z 的均值估计为

$$\mu_z = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} Z_j \quad (8)$$

如果 n 个状态变量相关, 且每一组合出现的概率不相等, 则其概率值 P_j 的大小取决于变量间相关系数 ρ , 即

$$P_j = \frac{1}{2^n} (1 + e_1 e_2 \rho_{12} + e_2 e_3 \rho_{23} + \dots + e_{n-1} e_n \rho_{(n-1)n}) \quad (9)$$

式中: e_i ($i=1, 2, \dots, n$) 取值为, 当 x_i 取 x_{i1} 时, $e_i=1$; 当 x_i 取 x_{i2} 时, $e_i=-1$; $\rho_{(i-1)i}$ 为状态变量 x_{i-1} 与 x_i 之间的相关系数, 所以 Z 的均值估计式为

$$\mu_z = \sum_{j=1}^{2^n} P_j Z_j \quad (10)$$

根据原点矩与中心矩的估计, 可以导出状态函数概率分布的均值与方差。

(1) 一阶原点矩 M_1

随机变量 Z 的一阶原点矩, 也称均值 μ_z , 其矩点估计为

$$M_1 = E(Z) = \mu_z = \sum_{j=1}^{2^n} Z_j P_j \quad (11)$$

(2) 二阶中心矩 M_2

随机变量 Z 的二阶中心矩, 也称为方差 σ_z^2 , 其矩点估计为

$$M_2 = E(Z - \mu_z)^2 = \sigma_z^2 = \sum_{j=1}^{2^n} P_j Z_j^2 - \mu_z^2 \quad (12)$$

求出状态函数的均值 μ_z 和方差 σ_z^2 后, 如果状态函数服从正态分布, 则可计算出可靠度指标 β 和破坏概率 P_f [5,6]。

$$\beta = \mu_z / \sigma_z; P_f = 1 - \Phi(\beta) \quad (13)$$

式中: $\Phi(\beta)$ 为标准正态分布函数。

4 算例分析

笔者针对图 2 的算例, 采用以下 3 种计算方法进行边坡可靠度分析: (1) 本文介绍的方法; (2) 状态函数仍采用本文推导出的安全系数显式解, 可靠度计算采用一次二阶矩法的中心点法(MFOSM); (3) 状态函数采用 M-P 法, 可靠度计算采用蒙特卡洛法。

算例: 有一简单均质土坡, 其形状及折线滑动面的几何尺寸如图 2 所示, 土的重度为 20 kN/m^3 。选择对边坡计算结果影响权重最大的 c, φ 作为可靠度分析的基本变量, 并设它们服从正态分布, 其均值和均方差 $\mu_c = 18 \text{ kPa}$, $\sigma_c = 3.6 \text{ kPa}$, $\mu_\varphi = 22^\circ$,

$\sigma_\phi = 2.2^\circ$, 其他参数变异性较小, 做常量处理。

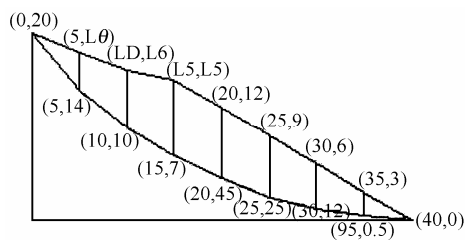


图2 滑坡体分条图(单位:m)
Fig.2 slices of sliding body(unit:m)

4.1 算法

算法1: 由于所选随机变量仅为 c , ϕ 两个变量, 根据Rosenblueth基本原理, 可得到 Z 的4个函数值, 函数值的计算采用式(4)介绍的方法:

$$Z1=F(\mu_c+\sigma_c, \mu_\phi+\sigma_\phi)=F(21.6, 24.2)=1.636;$$

$$Z2=F(\mu_c+\sigma_c, \mu_\phi-\sigma_\phi)=F(21.6, 19.8)=1.425;$$

$$Z3=F(\mu_c-\sigma_c, \mu_\phi+\sigma_\phi)=F(14.4, 24.2)=1.427;$$

$$Z4=F(\mu_c-\sigma_c, \mu_\phi-\sigma_\phi)=Z(14.4, 19.8)=1.217.$$

设随机变量 c , ϕ 相互独立, 由式(8)有

$$\mu_z = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} Z_j = 1.426; \quad \mu_{z^2} = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} Z_j^2 = 2.056; \quad \sigma_z =$$

$$\sqrt{\mu_{z^2} - (\mu_z)^2} = 0.148. \quad \text{则可靠指标 } \beta = (\mu_z - 1) / \sigma_z = 2.871. \quad \text{破坏概率为 } P_f = 1 - \Phi(\beta) = 1 - 0.998 = 0.20\%.$$

算法2: 状态函数采用式(5), 在各随机变量的均值点处用泰勒级数将功能函数展开, 使之线性化。

$$Z = F(c, \phi) =$$

$$F(\mu_c, \mu_\phi) + \frac{\partial F}{\partial c}(c - \mu_c) + \frac{\partial F}{\partial \phi}(\phi - \mu_\phi) \quad (14)$$

$$\text{则 } \frac{\partial F}{\partial c} = 0.029, \quad \frac{\partial F}{\partial \phi} = 2.744.$$

根据式(14), 可计算出状态函数的均值和均方差进而求得可靠指标和破坏概率:

$$\mu_z = F(\mu_c, \mu_\phi) = 1.424, \quad \sigma_z = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)^2 \sigma_c^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \phi}\right)^2 \sigma_\phi^2} =$$

$$0.148, \quad \beta = \frac{\mu_z - 1}{\sigma_z} = 2.858, \quad P_f = 1 - \Phi(\beta) = 1 - 0.998 = 0.20\%.$$

算法3: 状态函数采用M-P法, 可靠度计算采用蒙特卡洛法, 模拟次数为200 000次, 所得安全系数为1.404 7, 可靠指标为2.838, 相应破坏概率为0.23 %。

4.2 结果分析

由上述计算结果可知:

(1) 3种算法的计算结果十分接近, 这说明了

本文所提出的以安全系数显式为状态函数, 利用Rosenblueth法计算边坡可靠度方法的正确性。

(2) 根据下滑力超载储备求出的安全系数较相对精确的M-P法偏大。原因是当条块间存在负的下滑力时, 由于在安全系数计算中负下滑力不归0, 导致求解结果偏大。

(3) 当边坡安全偏大时, 本文所提出的显示计算公式, 求出的安全系数误差也较大, 而安全系数的方差一般变化较小, 从而可靠指标偏大, 破坏概率偏小。所以当边坡稳定程度较高时, 宜采用多种可靠度分析方法进行计算分析, 以得出较准确的结果。

(4) 土的抗剪强度参数 c 、 ϕ 间具有很强的负相关性, 文献[7]指出, 随着 c 、 ϕ 间相关系数绝对值的增大, 各种方法所得的可靠性指标均有较大的提高。本文没有考虑随机变量间的相关性, 计算结果偏于保守。

5 结 语

边坡安全系数的显式解, 可方便、快捷地计算出边坡的安全系数。Rosenblueth法与边坡可靠度分析的FOSM方法相比, 不要求解状态函数的偏导数。当随机变量个数较少时, 计算次数较蒙特卡洛法减少很多。因此, 采用安全系数的显式解为状态函数, 可靠度指标的计算采用Rosenblueth法, 可快速有效地求解出边坡的破坏概率。对于一般边坡可靠度稳定分析, 其精度可满足工程需要。

参 考 文 献

- [1] 赵寿刚, 兰雁, 沈细中, 等. 蒙特卡洛法在土质边坡可靠性分析中的应用[J]. 人民黄河, 2006, 28(5): 65—66.
- [2] 罗文强, 龚珏. Rosenblueth方法在斜坡稳定性概率评价中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(2): 232—235.
- [3] 季薇薇. 边坡稳定分析中不平衡推力法的两种解法[J]. 黑龙江水专学报, 2006, 33(2): 22—23.
- [4] GB 50021—2001, 岩土工程勘察规范[S].
- [5] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析——原理、方法、程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003.
- [6] 祝玉学. 边坡可靠度分析[M]. 北京: 冶金工业出版社, 1993.
- [7] 谭晓慧. 边坡稳定可靠度分析方法的探讨[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2001, 24(6): 40—44.